1. 设p是素数，w是p次本元单位根。令$\mathbb{F}_p$为p元域。

   (a) 证明$\mathbb{Z}[w]/(1-w)$ 同构于$\mathbb{F}_p$。

   (b) 设$\varphi \in \mathbb{F}_p[x]$是次数小于$p$的非零多项式。证明$\varphi$在$\mathbb{F}_p$中的根的重数一定小于$\varphi$的非零系数的个数。

   (c) 设$I = \{a_1, \cdots, a_n\}$, $J = \{b_1, \cdots, b_n\}$为$\mathbb{F}_p$的两个n元子集。证明: $n \times n$ 矩阵$(w^{a_i b_j})_{i,j}$ 可逆。

2. (a) 设$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ 满足$a_n \geq 1$, $a_{n-1} \geq 0$，对$i \in \{0, 1, \cdots, n-2\}$, $|a_i| \leq H$，其中H为正常数。令α为$P(x)$的一个复根。证明：或者α 的实部非正，或者$|\alpha| < \frac{1+\sqrt{1+4H}}{2}$ 。

   (b) 设$b > 2$ 为整数，p是素数。考虑p的b –进制展开

$$p = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0$$

   证明: 多项式$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 在$\mathbb{Q}$ 上不可约。

3. 用$< \cdot, \cdot >$表示$\mathbb{C}^n$的标准内积。对任意$A \in M_n(\mathbb{C})$，令

$$W(A) = \{< x, Ax >;\ \|x\| = 1\}.$$

   设$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$且$|z_i| = 1$, $\triangle(z_1, z_2, z_3)$ 表示以z_1, z_2, z_3为顶点的三角形。试证明：$W(A) \subseteq \triangle(z_1, z_2, z_3)$ 当且仅当存在半正定的矩阵$A_1, A_2, A_3 \in M_n(\mathbb{C})$ 满足

$$A = z_1 A_1 + z_2 A_2 + z_3 A_3, \quad \sum_{i=1}^{3} A_i = I.$$